Congo Sciences
Journal en ligne de l'ACASTI et du CEDESURK
ACASTI and CEDESURK Online Journal
ISSN: 2410-4299, an International Journal

Distributions Associées aux Feuilletages et Algèbres de Lie-Rinehart

DIANGITUKULU NDIMBA Samuel[1*], MUSESA LANDA Alain[1].

Paper History
Received:
September 03, 2019
Revised:
November 27, 2019
Accepted:
January 20, 2020
Published:
March 27, 2020

Keywords:
Distributions, tangent bundle to the leaves, symplectic leaves, Lie-Rinehart algebra.

ABSTRACT

Distributions associated to a foliation and Lie-Rinehart algebra.

In this paper we determine a Lie-Rinehart algebra structure on the submodule, $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$, associated to the $T\mathcal{F}$distribution, we define the Lie-Rinehart algebra structure concept on the foliation in leaf geometry and then we deduce that any distribution associated to a foliation $\mathcal{F}$ is completely integrable.

[1]Département de Mathématiques et Informatique, Faculté de Sciences, Université de Kinshasa, KINSHASA XI, Kinshasa, République Démocratique du Congo.

* To whom correspondence should be addressed: *diangitukulusamuel@gmail.com*

INTRODUCTION

Soit M une variété différentielle de dimension $n = p + q$. On rappelle qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p et de codimension q sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de M et, pour tout i, d'un difféomorphisme

$$\varphi_i : U_i \subset M \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

Tel que, sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$,

le difféormorphisme de changement de coordonnées

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$
$$(x, y) \quad \longmapsto \quad (x', y')$$

Soit de la forme $x' = \varphi_{ij}(x, y)$ et $y' = \gamma_{ij}(y)$ avec

φ_{ij}et γ_{ij} deux applications différentiables de variables $x = (x^1, \dots, x^p)$ et $y = (y^1, \dots, y^{n-p})$.

Les cartes (U_i, φ_i) sont appelées des cartes adaptées (au feuilletage) ou des cartes distinguées, le domaine U_i est appelé ouvert distingué. Les q dernières variables $y = (y^1, \dots, y^{n-p})$ sont des variables transverses et le couple $(M, \mathcal{F})$ est appelé variété feuilletée. On parle aussi tout simplement de feuilletage $\mathcal{F}$ sur M et parfois noté $\mathcal{F}(M)$.

Exemple 1 : Lorsque M est une variété différentielle de dimension n. Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 (ou de dimension $n-1$) sur M est le noyau d'une 1-forme α sur M telle que $\alpha \wedge d\alpha = 0$ [NOVIKOV, 1964 ; GODBILLON, 1991].

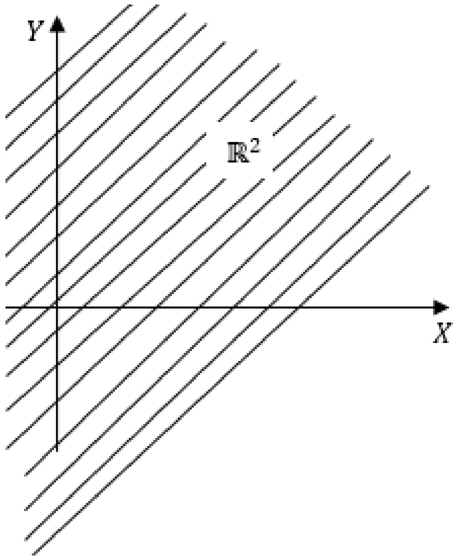

Figure 1 : Courbes intégrales de l'équation différentielle $dy - \alpha dx = 0$

Exemple 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle $dy - \alpha dx = 0$ dans le plan admet pour courbes intégrales les droites d'équations $y = \alpha x + c$ où c est une constante réelle. Chaque valeur de c, détermine donc une droite affine. Lorsqu'on fait varier c dans tout $\mathbb{R}$, on obtient une partition du plan $\mathbb{R}^2$en droites parallèles de pente α. On obtient ainsi un feuilletage $\mathcal{F}$illustré dans la Figure 1.

On utilise toujours les cartes adaptées pour faire des calculs de tel sorte que les coordonnées reflètent la structure de feuilletage sous-jacente.

Lorsque M est une variété différentielle de dimension n et $p \leq n$ un entier positif. On appelle distribution P de dimension p sur M une application

$$P : M \longrightarrow TM, x \longmapsto P_x \in T_x M,$$

qui expédie tout point $x \in M$ sur un sous-espace vectoriel P_x de $T_x M$ de dimension p [MOLINO, 1975]. On écrit

$$P = \bigcup_{x \in M} P_x.$$

Une distribution P de dimension p sur M est dite différentiable si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et p champs de vecteurs différentiables $X_1, \dots, X_p$ sur U tels que

$$P_x = span\{X_1(x), \dots, X_p(x)\}$$

Soit P une distribution différentiable sur M. Un champ de vecteurs différentiable X sur M est dit tangent à P si, et seulement si sa valeur à chaque point $x \in M$ appartient à P_x. Par abus de notation, l'ensemble des champs de vecteurs tangents à P est noté $\mathfrak{X}(P)$.L'ensemble, $\mathfrak{X}(P)$, des champs des vecteurs tangents à P possède une structure naturelle de $C^\infty(M)$-module [MOLINO, 1988 ; MOLINO, 1991]. On dit que $\mathfrak{X}(P)$ est le $C^\infty(M)$-sous-module associé à P. En d'autres termes, $\mathfrak{X}(P)$ est un $C^\infty(M)$-sous-module de $C^\infty(M)$-module$\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M.

D'après Frobenius, une distribution différentiable P est complètement intégrable si $[X, Y] \in \mathfrak{X}(P)$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$ [MOLINO, 1988].

Dans une carte $(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^{n-p})$ de M de domaine U, adaptée au feuilletage $\mathcal{F}$. Une distribution P de dimension p sur M est dite associée au feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p, si pour chaque $x \in U \subset M$, P_x est engendrée par les champs de vecteurs $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^p}\right\}$[MOLINO, 1988].

Lorsque M est une variété différentielle de dimension n et $\mathcal{F}$ un feuilletage de dimension p. On note $\mathcal{F}(x)$ la feuille connexe passant par $x \in M$ et de dimension p. Le fibré $T\mathcal{F} = \bigcup_{x \in M} T_x \mathcal{F}(x)$ est appelé fibré tangent aux feuilles et est tel que le $C^\infty(M)$-module, $\Gamma(T\mathcal{F})$, des sections différentiables de $T\mathcal{F}$admet une structure d'algèbre de Lie et qu'en chaque point $x \in M$, les sous-espaces vectoriels

$\left(\Gamma(T\mathcal{F})\right)_x = \{X_x \in T_x M, X \in \Gamma(T\mathcal{F})\}$ constitués des valeurs en x des sections de $T\mathcal{F}$sont de même dimension p et $\dim T\mathcal{F} = n + p$ [LICHNEROWICZ , 1982].

On vérifie sans peine que $T\mathcal{F}$ est une distribution différentiable sur M, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{F}$ est un feuilletage de dimension p sur M,$T\mathcal{F}$est une distribution qui expédie$x \in M$ sur le sous-espace vectoriel$T_x\mathcal{F}(x)$ de dimension $p$de $T_x M$.Le sous-espace vectoriel $T_x\mathcal{F}(x)$est engendré par La famille des champs de vecteurs $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^p}\right\}$ définis dans une carte adaptée dont le domaine contient x.

La distribution $T\mathcal{F}$est appelée distribution associée au feuilletage $\mathcal{F}$.La sous algèbre $\Gamma(T\mathcal{F})$, c'est-à-dire l'espace des sections différentiables de $T\mathcal{F}$, est appelée l'algèbre de Lie réelle des champs de vecteurs tangents aux feuilles et est notée par abus de notation $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Si une distribution D de dimension p sur M est donnée et si elle est intégrable, le théorème de Frobenius dit [TONDEUR, 1997] qu'il existe un feuilletage (unique) $\mathcal{F}$ de dimension p dont $D = T\mathcal{F}$ est le fibré tangent aux feuilles, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des variétés intégrales maximales du sous-fibré $D = T\mathcal{F} \subset TM$.

Ainsi, donc toute information sur le feuilletage est contenue dans son approximation linéaire.

Exemple 3 : Lorsque $\pi : M \to W$est une submersion d'une variété lisse Mdans une variété lisse$W$de dimension q. $P = Ker\pi_*$est une distribution complètement [REINHART, 1983].

Lorsque A est une algèbre commutative unitaire d'élément-unité 1_A sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. Une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur $\mathcal{G}$ est la donnée d'un morphisme de A-modules et $\mathbb{K}$-algèbres de Lie

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow Diff_{\mathbb{K}}(A)$$

tel que

$$[x, ay] = [\rho(x)(a) - a.\rho(x)(1_A)].y + a.[x, y]$$

pour tous x et y dans $\mathcal{G}$et $a \in A$ [OKASSA , 2007].

On dit que $(\mathcal{G},\rho)$ est une algèbre de Lie-Rinehart et $\mathcal{L}_{alt}(\mathcal{G},A)=\oplus_{r\in\mathbb{N}}\mathcal{L}^r(\mathcal{G},A)$ où $\mathcal{L}^r_{alt}(\mathcal{G},A)$est le A-module des r-formes multilinéaires alternées sur $\mathcal{G}$.

On note

$$d_\rho : \mathcal{L}_{alt}(\mathcal{G},A)\longrightarrow \mathcal{L}_{alt}(\mathcal{G},A)$$

l'opérateur de cohomologie associée à la représentation ρ. On vérifie aisément que $d_\rho f\in\mathcal{L}_{alt}(\mathcal{G},A)$ pour tout $f\in\mathcal{L}_{alt}(\mathcal{G},A)$.

La 1-forme

$$d_\rho 1_A : \mathcal{G}\longrightarrow A, x\longmapsto (d_\rho 1_A)(x)=\rho(x)(1_A)$$

est la 1-forme canonique de l'algèbre de Lie-Rinehart $(\mathcal{G},\rho)$ [OKASSA , 2008].

Dans ce travail, on détermine la structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur le $C^\infty(M)$-module, $\mathfrak{X}(\mathcal{F})=\Gamma(T\mathcal{F})$, des sections différentiables du fibré tangent au feuilletage $\mathcal{F}$ de la variété différentielle M et on définit le concept de structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur le feuilletage $\mathcal{F}$ de la variété différentielle M.

Dans toute la suite, on note $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions réelles de classe C^∞ sur M, $1_{C^\infty(M)}$ son élément-unité, $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M, $Diff_{\mathbb{R}}[C^\infty(M)]$ le $C^\infty(M)$-module des opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1 sur $C^\infty(M)$ et d l'opérateur de différentiation extérieure.

STRUCTURE D'ALGEBRE DE LIE-RINEHART SUR LES FEUILLETAGES EN GEOMETRIE TANGENTE

Dans ce qui suit on détermine la structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur le sous-module $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ associé à la distribution $T\mathcal{F}$.

Structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Lorsque $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur une variété différentielle M, le fibré tangent aux feuilles $T\mathcal{F}$ est un sous-fibré vectoriel du fibré tangent TM, le $C^\infty(M)$-module $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ des sections différentiables de $T\mathcal{F}$ admet une structure d'algèbre de Lie réelle et l'application

$$\rho : \mathfrak{X}(\mathcal{F})\longrightarrow\mathfrak{X}(M), X\longmapsto\rho(X)=X$$

est une injection canonique.

On sait que le fibré tangent aux feuilles $T\mathcal{F}$ est une distribution différentiable sur M associée au feuilletage $\mathcal{F}$ et l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ des champs de vecteurs tangents aux feuilles est le sous-module associé à $T\mathcal{F}$. Ainsi, on a la proposition 1.

Proposition 1. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur une variété différentielle M. Alors une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur$\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ est de la forme $(\mathfrak{X}(\mathcal{F}),\rho_\alpha)$ où α est une forme linéaire sur $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Preuve : Soit $(\mathfrak{X}(\mathcal{F}),\psi)$ une algèbre de Lie-Rinehart sur $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$. Pour $X,Y\in\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ et pour $f\in C^\infty(M)$, on a :

D'une part

$$[X,f.Y]=\Big([\psi(X)](f)-f.[\psi(X)]\big(1_{C^\infty(M)}\big)\Big).Y + f.[X,Y]$$

et d'autre part, comme $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ est une sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur la variété différentielle M, on a

$$[X,f.Y]=X(f).Y+f[X,Y]$$

pour tous X,Y dans $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$et $f\in C^\infty(M)$. On peut écrire de la manière équivalente

$$[\psi(X)](f)=X(f)+f.[\psi(X)]\big(1_{C^\infty(M)}\big)$$
$$=\rho(X)(f)+f.[\psi(X)]\big(1_{C^\infty(M)}\big)$$

L'application

$$\alpha : \mathfrak{X}(\mathcal{F})\longrightarrow C^\infty(M)$$
$$X \longmapsto \alpha(X)=[\psi(X)]\big(1_{C^\infty(M)}\big)$$

est une forme linéaire, ainsi

$$[\psi(X)](f)=[\rho(X)](f)+f.\alpha(X).$$

Finalement, on déduit que

$$\psi=\rho_\alpha$$

car par définition

$[\rho_\alpha(X)](f)=[\rho(X)](f)+f.\alpha(X)$ pour tout $X\in\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ et pour tout $f\in C^\infty(M)$. ■

Proposition 2. Lorsque d_{ρ_α} est l'opérateur de cohomologie associé à la représentation

$\rho_\alpha : \mathfrak{X}(\mathcal{F})\longrightarrow Diff_{\mathbb{R}}[C^\infty(M)]$, alors la forme linéaire α sur $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ est complètement intégrable.

Preuve. Soit ρ_α une représentation de $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$dans $C^\infty(M)$. Pour tous $X,Y\in\mathfrak{X}(\mathcal{F})$et $f\in C^\infty(M)$, on a :

$$0=[\rho_\alpha(X),\rho_\alpha(Y)](f)-(\rho_\alpha[X,Y])(f)$$
$$=\big(\rho_\alpha(X)\circ\rho_\alpha(Y)-\rho_\alpha(Y)\circ\rho_\alpha(X)\big)(f)-\big((\rho[X,Y])(f)+f\alpha[X,Y]\big)$$
$$=\rho_\alpha(X)\Big(\big(\rho_\alpha(Y)\big)(f)\Big)-\rho_\alpha(Y)\Big(\big(\rho_\alpha(X)\big)(f)\Big)-(\rho[X,Y])(f)-f\alpha[X,Y]$$

$= \rho_\alpha(X)\left((\rho(Y))(f) + f\alpha(Y)\right) - \rho_\alpha(Y)\left((\rho(X))(f) + f\alpha(X)\right) - [X,Y](f) - f\alpha[X,Y]$

$= \rho_\alpha(X)(Y(f) + f\alpha(Y)) - \rho_\alpha(Y)(X(f) + f\alpha(X)) - [X,Y](f) - f\alpha[X,Y]$

$= (\rho_\alpha(X))(Y(f)) + (\rho_\alpha(X))(f).\alpha(Y) + f(\rho_\alpha(X))(\alpha(Y)) - f\alpha(Y)(\rho_\alpha(X))(1_{C^\infty(M)}) - (\rho_\alpha(Y))(X(f)) - (\rho_\alpha(Y))(f)\alpha(X) - f(\rho_\alpha(Y))(\alpha(X)) + f\alpha(X)(\rho_\alpha(Y))(1_{C^\infty(M)}) - [X,Y](f) - f\alpha[X,Y]$

$= \rho(X)(Y(f)) + Y(f)\alpha(X) + \left((\rho(X))(f) + f\alpha(X)\right)\alpha(Y) + f\left((\rho(X))(\alpha(Y)) + \alpha(Y)\alpha(X)\right) - f\alpha(Y)\left((\alpha(X))(1_{C^\infty(M)}) + 1_{C^\infty(M)}\alpha(X)\right) - \left((\rho(Y))(X(f)) + X(f)\alpha(Y)\right) - \left((\rho(Y))(f) + f\alpha(Y)\right)\alpha(X) - f[(\rho(Y))(\alpha(X)) + \alpha(X)\alpha(Y)] + f\alpha(X)\left(\rho(Y)(1_{C^\infty(M)}) + 1_{C^\infty(M)}\alpha(Y)\right) - [X,Y](f) - f\alpha[X,Y]$

$= X(Y(f)) + Y(f)\alpha(X) + X(f)\alpha(Y) + f\alpha(X)\alpha(Y) + fX(\alpha(Y)) + f\alpha(Y)\alpha(X) - f\alpha(Y)X(1_{C^\infty(M)}) - f\alpha(Y)\alpha(X) - Y(X(f)) - X(f)\alpha(Y) - Y(f)\alpha(X) - f\alpha(Y)\alpha(X) - fY(\alpha(X)) - f\alpha(X)\alpha(Y) + f\alpha(X)\left(Y(1_{C^\infty(M)})\right) + f\alpha(X)\alpha(Y) - [X,Y](f) - f\alpha[X,Y]$

$= X(Y(f)) + fX\alpha(Y) - Y(X(f)) - fY(\alpha(X)) - [X,Y](f) - f\alpha[X,Y]$

$= [X,Y](f) + fX\alpha(Y) - fY\alpha(X) - [X,Y](f) - f\alpha[X,Y]$

$= fX(\alpha(Y)) - fY(\alpha(X)) - f\alpha[X,Y]$

$= f(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha[X,Y])$

$= f(\rho(X)\alpha(Y) - \rho(Y)\alpha(X) - \alpha[X,Y])$

$= fd_{\rho_\alpha}\alpha(X,Y)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$,

on déduit que $d_{\rho_\alpha}\alpha(X,Y) = 0, \forall X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ i.e.

$d_{\rho_\alpha}\alpha = 0.$

Ainsi, $\alpha \wedge d_{\rho_\alpha}\alpha = \alpha \wedge d\alpha = 0$ c'est-à-dire α est complètement intégrable.■

Corollaire 1. Soit $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ l'algèbre de Lie réelle des champs de vecteurs tangents aux feuilles. Le couple $(\mathfrak{X}(\mathcal{F}), \rho_\alpha)$ est une structure d'algèbre de Lie-Rinehart si et seulement s'il existe une forme linéaire α sur $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ tel que α est complètement intégrable c'est-à-dire $\alpha \wedge d_{\rho_\alpha}\alpha = 0$ où d_{ρ_α} est l'opérateur de cohomologie associé à la représentation ρ_α.

On vérifie que $d_{\rho_\alpha}f \in \mathcal{L}_{alt}(\mathfrak{X}(\mathcal{F}), C^\infty(M))$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.

La 1-forme

$$d_{\rho_\alpha}1_{C^\infty(M)} : \mathfrak{X}(\mathcal{F}) \longrightarrow C^\infty(M), X \longmapsto [\rho_\alpha(X)](1_{C^\infty(M)})$$

est telle que pour $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, on a

$$\begin{aligned}(d_{\rho_\alpha}1_{C^\infty(M)})(X) &= \rho_\alpha(X)(1_{C^\infty(M)}) \\ &= \rho(X)(1_{C^\infty(M)}) + 1_{C^\infty(M)}.\alpha(X) \\ &= X(1_{C^\infty(M)}) + \alpha(X) \\ &= \alpha(X).\end{aligned}$$

On déduit que la 1-forme $\alpha = d_{\rho_\alpha}1_{C^\infty(M)}$ est la forme canonique d'algèbre de Lie-Rinehart $(\mathfrak{X}(\mathcal{F}), \rho_\alpha)$.

Comme le sous-module $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ associé à la distribution $T\mathcal{F}$ admet une structure d'algèbre de Lie-Rinehart, alors la distribution $T\mathcal{F}$ est complètement intégrable.

Structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur feuilletage en géométrie tangente

Comme au niveau infinitésimal, la géométrie tangente (la géométrie des feuilles) est modelée par $T\mathcal{F}$ et $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ est le $C^\infty(M)$-module associé à $T\mathcal{F}$. On est ainsi conduit à la définition suivante

Définition 1. Une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur le feuilletage $\mathcal{F}$ est la donnée d'un morphisme de $C^\infty(M)$-modules et d'algèbres de Lie réelles

$$\rho_\alpha : \mathfrak{X}(\mathcal{F}) \longrightarrow Diff_{\mathbb{R}}[C^\infty(M)]$$

tel que pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$*et* $f \in C^\infty(M)$*, on a*

$$[X, f.Y] = [\rho_\alpha(X)(f) - f\rho_\alpha(X)(1_{C^\infty(M)})].Y + f[X,Y]$$

On dit que le couple $(\mathfrak{X}(\mathcal{F}), \rho_\alpha)$ est une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur $(M, \mathcal{F})$ et l'application ρ_α est une représentation de $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$ dans $C^\infty(M)$.

Lorsque M est une variété différentiable, $\mathcal{F}(M)$ un feuilletage de M et $T\mathcal{F}$ le fibré tangent au feuilletage $\mathcal{F}(M)$. Si M' une variété différentielle telle qu'il existe une submersion $s : M' \longrightarrow M$ et $(U; x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$ est une carte de M adaptée au feuilletage $\mathcal{F}$.Il résulte de la propriété de la submersion que les p fonctions locales $x^i \circ s$ sont indépendantes sur $s^{-1}(U)$ et que la submersion s définit sur M' un feuilletage $\mathcal{F}'$ qui est dit l'image réciproque de $\mathcal{F}$par s.

En particulier, comme la projection du fibré tangent au feuilletage $\pi : T\mathcal{F} \longrightarrow M$ est une submersion de $T\mathcal{F}$ sur M et pour tout$x \in M$, $\pi^{-1}\mathcal{F}(x)$ est le fibré tangent de la feuille $\mathcal{F}(x)$.On définit ainsi un feuilletage de la variété $T\mathcal{F}$ par des feuilles de dimension $2p$ (dimension paire) [LICHNEROWICZ, 1979 ; LICHNEROWICZ, 1982].

CONCLUSION

Dans ce papier, lorsque $T\mathcal{F}$ est une distribution associée au feuilletage F, nous démontrons que son sous-module associé $X(\mathcal{F})$ admet une structure d'algèbre de Lie-Rinehart de la forme $(\mathfrak{X}(\mathcal{F}), \rho_\alpha)$. Ce qui nous a permis de retrouver un résultat classique selon lequel une distribution est complétement intégrable si seulement et si elle est associée à un feuilletage. Nous avons enfin, utilisé la structure d'algèbre de Lie-Rinehart $(\mathfrak{X}(\mathcal{F}), \rho_\alpha)$ pour introduire le concept de structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur le feuilletage F en géométrie tangente.

Dans l'avenir, nous pouvons nous intéresser aux cas particuliers des feuilletages de codimension 1 ainsi qu'aux feuilletages de dimension 1 appelés flots.

RESUME

Nous déterminons dans ce papier, une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur le sous-module, $\mathfrak{X}(\mathcal{F})$associé au fibré tangent aux feuilles $T\mathcal{F}$ d'un feuilletage $\mathcal{F}$. Le concept de structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur un feuilletage en géométrie tangente est introduite ensuite. Nous déduisons enfin, en utilisant les structures d'algèbres de Lie-Rinehart, le résultat classique selon lequel, toute distribution associée à un feuilletage est complètement intégrable.

Mots Clés :

Distributions, fibré tangent aux feuilles, feuilles symplectiques, algèbre de Lie-Rinehart.

REFERENCES

GODBILLON C. [1991]. Feuilletage. Etudes Géométriques, Progress in Mahtematics Birkhausser.

LICHNEROWICZ A. [1979]. Algèbres de Lie attachées à un feuilletage, Ann.Fac.Sci.Toulouse. Math 1, 45-49.

LICHNEROWICZ A. [1982]. Variétés de Poisson et feuilletage, Ann.Fac.Sci.Toulouse Math.4, 195-269.

MOLINO P. [1975]. Sur la géométrie transverse des feuilletages, Ann. Inst. Fourier 25, Paris 281, 203-206.

MOLINO P. [1988]. Riemannian Foliations, Progress in Mathematics, Birkhäuser.

MOLINO P. [1991]. La géométrie différentielle des feuilletages dans l'œuvre de B. Reinhart, Ann.Global Anal.Geom.9, 5-7.

NOVIKOV S. [1964]. Foliations of codimension 1 on manifold, soviet.Math.Doki.5.540-544.

OKASSA E. [2007]. Algèbres de Jacobi et Algèbres de Lie-Rinehart-Jacobi. j. pure Appl. Algebra 208, n°03, 1071-1089.

OKASSA E. [2008]. On Lie-Rinehart-Jacobi algebras. J. Algebras Appl.7, n°06, 749-772.

REINHART B. [1983]. Differential geometry of foliations. Ergebnisse der Mathematik 99, Springer.

TONDEUR Ph. [1997]. Geometry of foliations, Monographs in Mathematics, Birkhäuser.