

Sur quelques exemples de calcul des limites des suites d'ensembles au sens de Kuratowski.

Teta S.S.^{1*}, Mubenga K.P.²

Paper History

Received:
March 29, 2011

Revised:
August 2, 2018

Accepted:
August 20, 2018

Published:
July 27, 2018

ABSTRACT

Some examples of calculating limits of sequence of subsets in Kuratowski's convergence

In this work, we put an accent on the Kuratowski's convergence. In fact, studies on numeric sequences give clear methods for resolving those problems by a computation of those sequences. However, when dealing with sequences of sets, the above methods are insufficient. Therefore, we introduce here the concept of convergence in Kuratowski's sense. This tool will allow us to find limits in Kuratowski's for a certain number of sequences of sets that we have conceived with the goal of using them in future research.

Keywords:

Kuratowski's convergence, K-inferior limit, K-superior limit

¹Faculté Polytechnique, Département de Prépolytechnique, Université de Kinshasa, B.P190, Kinshasa XI, R.D. Congo

²Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, Université de Kinshasa, B.P 190, Kinshasa XI, R.D. Congo

* To whom correspondence should be addressed : tetamath2014@gmail.com

INTRODUCTION

La convergence de Kuratowski est une convergence d'ensembles [DENKOWSKA et DENKOWSKI, 2004]. Considérons, en effet, un espace topologique arbitraire (X, τ) et une suite S_k de sous-ensembles de X .

Par définition, la K-limite inférieure de S_k , notée $K\text{-lim inf } S_k$, est l'ensemble de tous les points $x \in X$ tels que :

$$\forall U \in \mathcal{U}(x), \exists k_0 \in \mathbb{N} : U \cap S_k \neq \emptyset \text{ si } k \geq k_0$$

De même, on appelle la K-limite supérieure de (S_k) , notée $K\text{-lim sup } S_k$ l'ensemble de tous les points x tels que :

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \text{ et } \forall k_0 \in \mathbb{N}, \exists k \geq k_0 : U \cap S_k \neq \emptyset.$$

S'il existe un sous ensemble S de X tel que [DENKOWSKA et STASICA, 2007]

$S = K\text{-lim inf } S_k$, alors on écrit $S = K\text{-lim } S_k$ et on dit que la suite converge vers l'ensemble S au sens de Kuratowski, ou tout court que la suite K-converge vers S .

Ainsi, notre objectif dans cet article est de nous familiariser avec la convergence de Kuratowski en recherchant les limites au sens de Kuratowski de quelques suites d'ensembles dans $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, conçues par nous. Pour chaque suite, nous dégagons la K-limite inférieure ainsi que la K-limite supérieure et si les deux K-limites sont égales, alors la suite d'ensembles donnée est K-convergente et elle K-converge vers cette limite trouvée [LION et SPEISSEGGGER, 2004]

RECHERCHE DE LIMITES AU SENS DE KURATOWSKI DE QUELQUES SUITES D'ENSEMBLES.

2.1. Soient $X = \mathbb{R}^2$ et $S_k = \left\{ \left(x, \frac{1}{k} \right) / x \in]0, 1[\right\}$

Alors il est clair que [DENKOWSKI, PIERZCHALA, 2008]

$$K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \left\{ (x, 0) / x \in [0, 1] \right\}$$

Donc $K\text{-lim } S_k = \left\{ (x, 0), x \in [0, 1] \right\}$ c'est-à-dire la suite donnée est K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble $S = \left\{ (x, 0), x \in [0, 1] \right\}$

2.2. Prenons $X = \mathbb{R}^3$ et $S_k = \left\{ \left(\frac{1}{k}, y, z \right) / y, z \in]0, 1[\right\}$

Il est aussi clair que [DENKOWSKA et DENKOWSKI, 2012]

$$K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \left\{ (0, y, z) / y, z \in [0, 1] \right\}$$

Donc $K\text{-lim } S_k = \left\{ (0, y, z) / y, z \in [0, 1] \right\}$ c'est-à-dire la suite proposée est K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble

$$S = \left\{ (0, y, z) / y, z \in [0, 1] \right\}$$

2.3. Si $X = \mathbb{R}^4$ et $S_k = \left\{ \left(\frac{1}{k}, y, z, t \right) / y, z, t \in]0, 1[\right\}$,

alors on a bien :

$$K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \left\{ (0, y, z, t) / y, z, t \in [0, 1] \right\} \text{ [DORIN et}$$

NICOLAS, 2000]

Donc $K\text{-lim } S_k = \left\{ (0, y, z, t) / y, z, t \in [0, 1] \right\}$, c'est-à-dire la suite

proposée est K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble

$$S = \{(0, y, z, t) / y, z, t \in [0, 1]\}.$$

2.4. Si $X = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ et

$$S_k = \left\{ \left(\frac{1}{k}, x_1, \dots, x_{n-1} \right) / x_i \in]0, 1[\quad i = 1, \dots, n-1 \right\}$$

alors [HENROT et PIERRE, 2006]

$$S_k = K\text{-lim sup } S_k = \{(0, x_1, \dots, x_{n-1}) / x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n-1\}$$

$$\text{Donc } K\text{-lim sup } S_k = \{(0, x_1, \dots, x_{n-1}) / x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n-1\}$$

c'est-à-dire la suite donnée est K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble $S = \{(0, x_1, \dots, x_{n-1}) / x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n-1\}$

Dans tout ce qui suit, nous nous proposons de visualiser les cinq premiers termes de la suite pour la meilleure compréhension de l'article.

2.5. $X = \mathbb{R}^n$ et $S_k = \left\{ \left(\frac{1}{k} \right) / k \in \mathbb{N}^* \right\}$

Du développement selon NURAY et RHOADES [2012], on a :

$$S_k = \left\{ \left(\frac{1}{1}, \dots, \frac{1}{1} \right), \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{5} \right), \dots \right\}$$

Il est clair que $K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$

Donc $K\text{-lim } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$, c'est-à-dire la suite proposée est

K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble $S = \{(0, \dots, 0)\}$

2.6. $X = \mathbb{R}^n$ et $S_k = \left\{ \left(\frac{1}{ik} \right), k \in \mathbb{N}^* \right\} =$

$$\Rightarrow S_k = \left\{ \left(\frac{1}{1.1}, \dots, \frac{1}{n.1} \right), \left(\frac{1}{1.2}, \dots, \frac{1}{n.2} \right), \left(\frac{1}{1.3}, \dots, \frac{1}{n.3} \right), \left(\frac{1}{1.4}, \dots, \frac{1}{n.4} \right), \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left(1, \dots, \frac{1}{n} \right), \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n.2} \right), \left(\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n.3} \right), \left(\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n.4} \right), \left(\frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n.5} \right), \dots \right\}$$

On a [FRÉDÉRIC et ELLIOT, 2009] :

$$K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$$

Donc on a bien $K\text{-lim } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$ c'est-à-dire la suite

proposée est K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble $S = \{(0, \dots, 0)\}$

2.7. $X = \mathbb{R}^n$ et $S_k = \left\{ \left(\frac{1}{k+i-1} \right), k \in \mathbb{N}^* \right\}$

$$\Rightarrow S_k = \left\{ \left(\frac{1}{1}, \dots, \frac{1}{n} \right), \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1} \right), \left(\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+2} \right), \left(\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+3} \right), \dots \right\}$$

[ULUSU et NURAY, 2012]

$$K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$$

Donc $K\text{-lim } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$ c'est-à-dire la suite donnée est

K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble $S = \{(0, \dots, 0)\}$

2.8. $X = \mathbb{R}^n$ et $S_k = \left\{ \left(x_k \right), k \in \mathbb{N}^* \right\}$ définie par

$$\begin{cases} \frac{1}{i+k} & \text{si } i \neq 1 \\ k & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_k = \left\{ \left(1, \frac{1}{2+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right), \left(2, \frac{1}{2+2}, \dots, \frac{1}{n+2} \right), \left(3, \frac{1}{2+3}, \dots, \frac{1}{n+3} \right), \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left(1, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1} \right), \left(2, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+2} \right), \left(3, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+3} \right), \dots \right\}$$

Un constat clair ici est que si $i \neq 1$, alors

$$K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$$

c'est-à-dire

$$K\text{-lim } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$$

tandis que si $i = 1$, alors $K\text{-lim } S_k$ n'existe pas dans \mathbb{R}^n .

D'où la limite au sens de Kuratowski de cette suite n'existe pas, c'est-à-dire la suite proposée n'est pas K-convergente dans \mathbb{R}^n [DRISS et HAJIOUI, 2002; DRISS, 2003].

2.9. $X = \mathbb{R}^n$ et $S_k = \left\{ \left(\frac{(k+1)i}{k^2-1} \right), k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n \right\}$

$$\Rightarrow S_k = \left\{ \left(\frac{(2+1).1}{2^2-1}, \dots, \frac{n}{2-1} \right), \left(\frac{1}{3-1}, \dots, \frac{n}{3-1} \right), \left(\frac{1}{4-1}, \dots, \frac{n}{4-1} \right), \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{1}, \dots, \frac{n}{1} \right), \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{n}{2} \right), \left(\frac{1}{3}, \dots, \frac{n}{3} \right), \dots \right\}$$

On a : $K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \{(0, \dots, 0)\}$ c'est-à-dire la suite proposée est K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble $S = \{(0, \dots, 0)\}$ [MOLCHANON, 2006]

2.10. $X = \mathbb{R}^n$ et $S_k = \left\{ \left(x_k \right), k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ définie par

$$\begin{cases} \frac{1}{i+k} & \text{si } i \neq 1 \\ 1 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_k = \left\{ \left(1, \frac{1}{2+1}, \dots, \frac{1}{n+1} \right), \left(1, \frac{1}{2+2}, \dots, \frac{1}{n+2} \right), \left(1, \frac{1}{2+3}, \dots, \frac{1}{n+3} \right), \dots \right\}$$

$$= \left\{ \left(1, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1} \right), \left(1, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+2} \right), \left(1, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n+3} \right), \dots \right\}$$

On a [KHALID et DRISS, 2004] :

$$K\text{-lim inf } S_k = K\text{-lim sup } S_k = \{(1, 0, \dots, 0)\}$$

Donc $K\text{-lim } S_k = \{(1, 0, \dots, 0)\}$ c'est-à-dire la suite proposée est

K-convergente et elle K-converge vers l'ensemble $S = \{(1, 0, \dots, 0)\}$.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons exploré la convergence au sens de Kuratowski dans le but d'étendre la notion des suites numériques à celle des suites d'ensembles. Nous avons conçu un certain nombre de suites d'ensembles pour lesquelles nous avons recherché la limite au sens de Kuratowski. Sur les dix suites conçues, neuf ont été K-convergentes et ont convergé vers une limite, tandis qu'une suite n'a pas convergé au sens de Kuratowski.

La vérification peut être possible en utilisant, bien entendu, la définition de la convergence au sens de Kuratowski, mais ce travail est renvoyé à l'étape future.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous mettons un accent sur la convergence de Kuratowski qui est une convergence d'ensembles. En effet, l'étude des suites numériques présente des méthodes claires de résolution des problèmes relatifs à ce sujet, à l'instar du calcul des limites de ces suites. Cependant, lorsqu'il s'agit des suites d'ensembles, les méthodes familières évoquées ci-dessus sont insuffisantes. C'est pour cette raison que nous introduisons la convergence au sens de Kuratowski. Cet outil permettra de rechercher la limite au sens de Kuratowski d'un certain nombre de suites d'ensembles que nous concevons et dont le but est de l'utiliser dans la recherche future.

Mots clés

Convergence de Kuratowski, K -limite inférieure, K -limite supérieure

REFERENCES

- DENKOWSKA Z, STASICA J [2007]. *Ensembles sous analytiques à la Polonaise*. Herman, Paris, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247x11008250>.
- DENKOWSKA Z, DENKOWSKI M.P [2004]. *Kuratowski convergence of the sections of definable sets*. *Ric. Mat*, 53,2 , 291 - 300, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247x11008250>.
- DENKOWSKA Z, DENKOWSKI M.P [2012]. *The Kuratowski convergence and connected components*. *Article J. Math. Anal. Appl.* 387, 48 - 65, <http://www.elsevier.com/locate/Jmaa>.
- DENKOWSKI M.P, PIERZCHALA R.P [2008]. *On the Kuratowski convergence of analytic sets*. *Ann.Polon.Math*, 93 ,2, 101 - 112, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247x11008250>.
- DORIN B., NICOLAS V. [2000]. *Stabilité de la solution d'un problème de Neumann pour des variations de frontière*. Editions scientifiques et médicales Elsevier SAS, Amsterdam, Pays-Bas ; <https://www.sciencedirect.com>

DRISS M. [2003]. *Analyse de récession et résultats de stabilité d'une convergence variationnelle, application à la théorie de la dualité en programmation mathématique*. Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences <https://www.essaim-cocv.org/articles/2003/01/cocv244/cocv244.html>

DRISS M., HAJIOUI K. EL [2002]. *Convergence des fonctions convexes et approximation inf-convolutives généralisées*. *Institut Mathématique 72*, 86. Article de Publications de l'institut Mathématique, Académie de Serbie, Belgrade

<https://www.researchgate.net/publication/277244931>

FRÉDÉRIC M., ELLIOTT P. [2009]. *Beyond Topology*. Livre, American Mathematical Society, New York

HENROT A., PIERRE M. [2006]. *Variation et Optimisation de formes, une analyse géométrique*. Springer Science & Business Media, Berlin.

KHALID EL. H, DRISS M [2004]. *Stabilité et optimisation dans les espaces non réflexifs*. *Article, Université IBN Tofail ; https://doi.org/10.1051/cocv:2004/017*.


LION J-M, SPEISSEGGER P. [2004]. *A geometric proof of the definability of the hausdorff limits*. *Selecta Math.(N.S)* 10,3, 377-390. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247x11008250>.

MOLCHANON I. [2006]. *Theory of Random Sets*. Springer science & Business Media, Berlin.

NURAY F., RHOADES B.E. [2012]. *Statistical convergence of sequences of sets*. *Article Fasc. Math, Math.put.poznan.pl*.

ULUSU U., NURAY F. [2012]. *Lacunary statistical convergence of sequences of set*, *Progress in Applied Mathematics*, 4, 2, 99-109 .

https://www.researchgate.net/publication/236015343_I-Lacunary_Statistical_Convergence_of_Sequences_of_Sets.

 This work is in open access, licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons license, unless indicated otherwise in the credit line; if the material is not included under the Creative Commons license, users will need to obtain permission from the license holder to reproduce the material. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>