ARTICLE

Congo Sciences
Journal en ligne de l'ACASTI et du CEDESURK
ACASTI and CEDESURK Online Journal
ISSN: 2410-4299, an International Journal

Note sur la Distribution Ecran Canonique d'une Hypersurface de Type Lumière de $\mathbb{R}_q^{m+2}$

LUNGIAMBUDILA MAMONA Oscar[1*], NSIMBA KIBANGUDI Jonathan[1], NZONGO LUBINGU Pascal[2]

Paper History

Received : April 25, 2020
Revised : September 01, 2020
Accepted : September 24, 2020
Published : November 27, 2020

Keywords

Canonical screen distribution,
Screen conformal hypersurface,
Integrable screen distribution,
Totally umbilical hypersurface.

ABSTRACT

Note on canonical screen distribution of lightlike hypersurface of $\mathbb{R}_q^{m+2}$.

In this paper, we present the construction of canonical screen distribution for lightlike hypersurface (lightlike cone) of semi-euclidean space according to Bejancu and Duggal approach. We prove that the canonical screen distribution for the lightlike cone of semi-euclidean space $\mathbb{R}_q^{m+2}$ is integrable (Theorem 4.1), totally conformal (Theorem 4.3) and totally umbilical (Theorem 4.4). So we deduce some induced geometrical objects and properties of this lightlike cone.

[1]Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Université de Kinshasa, BP 190, Kinshasa XI, République Démocratique du Congo.
[2]Institut Supérieur de Navigation et de Pèche (ISNP), BP 54, Muanda I, Muanda Ville, Kongo Central, République Démocratique du Congo.
[*]Corresponding author, e-mail: oscar.lungiambudila@unikin.ac.cd; oscar.lungiambudila@ucc.ac.cd

INTRODUCTION

Il est naturel de trouver une sous-variété de type lumière dans une variété semi-Riemannienne à cause de sa métrique indéfinie. L'étude de ces sous-espaces est aussi intéressante, du point de vue physique, les hypersurfaces nulles représentent les modèles de plusieurs types d'horizons étudiés en relativité générale. A cause de la métrique induite dégénérée sur ces sous-espaces, il n'est pas possible d'étudier ces sous-espaces comme dans la théorie habituelle de la géométrie non-dégénérée.

La théorie générale des sous-variétés de type lumière a été développée par KUPELI [1987] et par BEJANCU et DUGGAL [1996] dont le travail a été présenté sous forme d'ouvrage. La principale différence entre les sous-variétés de type lumière et les sous-variétés non dégénérées est que dans le premier cas, le fibré vectoriel normal $TM^{\perp}$intercepte le fibré tangent TM. Pour cette raison, dans la technique développée dans BEJANCU et DUGGAL [1996], les auteurs ont introduit, pour les hypersurfaces nulles, une distribution écran non dégénérée $S(TM)$ et ont construit un vibré vectoriel transverse nul correspondant qui vient jouer le rôle de la normale comme dans le cas non dégénéré. Cette technique permet alors de définir les objets géométriques induits (la connexion, les secondes formes fondamentales, les opérateurs formes, etc.) nécessaires pour la géométrie des sous-variétés. Il est à noter malheureusement que ces objets induits dépendent du choix de la distribution écran qui en général n'est pas unique. Ceci suscite des questionnements sur la construction d'une distribution écran canonique en géométrie dégénérée.

Actuellement dans la littérature, il y a pas mal des travaux sur la question sous examen. On peut citer BEJANCU [1993], BEJANCU et al. [1998], AKIVIS et GOLDBERG [2000], ATINDOGBE et DUGGAL [2004], DUGGAL [2007] qui ont concouru dans ce sens, mais cela, pour des classes d'hypersurfaces bien définies.

La présente étude est basée sur la construction de l'écran canonique présentée dans BEJANCU et DUGGAL [1996]. Le but de ce travail est d'étudier la géométrie du cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} doté d'un écran canonique et d'établir globalement et localement les propriétés et les objets géométriques induits sur cet espace de type lumière Le travail est organisé comme suit : La section deux présente la construction de la distribution écran et du fibré transverse nul ainsi que quelques relations de base sur les hypersurfaces de type lumière d'une variété semi-Riemannienne suivant l'approche de BEJANCU et DUGGAL [1996]. La section trois présente la construction de l'écran canonique sur une hypersurface de type lumière de l'espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$ en général et sur le cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} de l'espace $\mathbb{R}_q^{m+2}$ en particulier. La section quatre établit quelques résultats sur la géométrie du cône de lumière, entre autres l'intégrabilité de l'écran canonique (Théorème 4.1), suivant une approche autre que celle de la preuve donnée dans le Théorème 6.1 de BEJANCU et DUGGAL [1996]. La conformité de l'écran canonique de Λ_{q-1}^{m+1} , pour l'indice q en général (Théorème 4.3), résultat qui généralise celui de ATINDOGBE et DUGGAL [2004].

L'ombilicité totale de l'écran canonique et de celle du cône Λ_{q-1}^{m+1} a aussi été étudié (Théorème 4.4). Il a ainsi été déduit quelques propriétés géométriques issues de ces résultats. Dans La section cinq établit les calculs des objets géométriques induits sur le cône de lumièreΛ_{q-1}^{m+1}.

HYPERSURFACES DE TYPE LUMIERE

Soit M une hypersurface d'une variété semi-Riemannienne $(\bar{M},\bar{g})$ de dimension $m+2$ avec $m>0$ d'indice $q\in\{1,\cdots,m+1\}$. Comme pour tout $u\in M$, l'espace vectoriel T_uM est un hyperplan de l'espace semi-euclidien $(T_u\bar{M},\bar{g}_u)$, on considère les sous-espaces orthogonal et radical de T_uM définis par :

$$T_uM^{\perp}=\{V_u\in T_u\bar{M};\bar{g}_u(V_u,W_u)=0,\forall W_u\in T_uM\},$$

$$et$$

$$RadT_uM=\{\xi_u\in T_uM;g_u(\xi_u,V_u)=0,\forall V_u\in T_uM\}$$
$$=T_uM\cap T_uM^{\perp}.$$

On dit que M est une hypersurface de type lumière (nulle, dégénérée) de $\bar{M}$ (ou équivalemment l'immersion de M dans $\bar{M}$ est de type lumière) si $RadT_uM\neq\{0\}$, pour tout $u\in M$.

Proposition 2.1 ([BEJANCU et DUGGAL, 1996]). Soit (M,g) une hypersurface de $(\bar{M},\bar{g})$ de dimension $m+2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M est une hypersurface de type lumière;

(ii) g est de rang constant m sur M ;

(iii) $TM^{\perp}=\bigcup_{u\in M}T_uM^{\perp}$.

Preuve :(i) ⇒(ii) : Puisque $RadT_uM\neq\{0\}$, il existe un vecteur non zéro $\xi_u\in RadT_uM$,tel que $g(\xi_u,X_u)=0$ quel que soit $X_u\in T_uM$. Ainsi, $rang(g_u)<m+1$. Mais aussi, $rang(g_u)>m$ puisque $dimT_uM^{\perp}=1$. Par conséquent $rang(g_u)=m$, pour tout $u\in M$.

(ii) ⇒ (iii) : Comme $rang(g_u)=m$, il existe un vecteur non zéro $\xi_u\in T_uM$, tel que $g(\xi_u,X_u)=0$, pour tout $X_u\in T_uM$. Il en résulte que $\xi_u\in T_uM^{\perp}$. Ainsi, tout vecteur $Y_u\in T_uM^{\perp}$peut s'écrire comme $Y_u=\alpha\xi_u$, $\alpha\in\mathbb{R}$, ceci prouve que $T_uM^{\perp}\subset T_uM$ et $TM^{\perp}=\bigcup_{u\in M}T_uM^{\perp}$définit une distribution sur M.

(iii) ⇒ (i) : $TM^{\perp}$étant un sous-fibré vectoriel de TM, on a $RadTM=TM^{\perp}\neq 0$.

Ainsi l'hypersurface M est dégénérée. ■

De ce résultat, $RadTM=TM^{\perp}$ définit une distribution sur M de rang 1. La métrique semi-Riemannienne $\bar{g}$ sur $\bar{M}$ induit sur M un champ de tenseurs symétriques g de rang m et de type $(0,2)$. Dans ce cas, M est une sous-variété dégénérée de $\bar{M}$ de codimension 1. Ces hypersurfaces ont un intérêt particulier en relativité générale, elles implémentent les modèles de certains types d'horizons.

De ce qui précède, il n'est pas possible de décomposer le long de M, le fibré vectoriel tangent $T\bar{M}$ de l'espace ambiant $\bar{M}$ en somme directe interne des composantes tangentielle et normale comme dans le cas classique des hypersurfaces non dégénérées, ceci du fait que $TM^{\perp}\subset TM$.

Pour résoudre cette difficulté, BEJANCU et DUGGAL [1996] ont introduit une technique qui consiste à construire un fibré vectoriel supplémentaire non orthogonal à TMdans $T\bar{M}$, qui jouera le rôle de $TM^{\perp}$comme dans le cas classique.

Par cette approche, on considère un fibré vectoriel supplémentaire $S(TM)$ de $RadTM=TM^{\perp}$dans TM. On obtient la décomposition suivante :

$$TM=S(TM)\oplus_{orth}TM^{\perp}\qquad(2.1)$$

Comme chaque $S(T_uM)$ est le sous-espace vectoriel écran de T_uM, d'après BEJANCU et DUGGAL [1996], on appelle S(TM) une distribution écran sur M et elle est non dégénérée. En effet, en supposant un vecteur $X_u\in S(T_uM)$ tel que $g(X_u,Y_u)=0$, pour tout $Y_u\in S(T_uM)$, puisque en plus $g(X_u,\xi_u)=0$, pour tout $\xi_u\in T_uM^{\perp}$, on en déduit que $X_u\in RadT_uM=T_uM^{\perp}$. Ceci contredirait la relation (2.1). Il est à remarquer que la distribution écran $S(TM)$ définie est de rang m et elle n'est pas unique en général.

Définition 2.2 Une hypersurface de type lumière $(M;\ g)$ d'une variété semi-Riemannienne $(\bar{M};\ \bar{g})$, munie d'une distribution écran $S(TM)$ est dite normalisée par structure écran et on note

$(M;\ g;\ S(TM))$.

Désignons par $S(TM)^{\perp}$, le fibré vectoriel supplémentaire orthogonal à $S(TM)$ dans $T\bar{M}$. On a le long de M la décomposition suivante :

$$T\bar{M}_{|M}=S(TM)\oplus_{orth}S(TM)^{\perp}\qquad(2.2)$$

Suivant cette décomposition, on constate que $S(TM)^{\perp}$ est aussi un fibré vectoriel non dégénéré de rang 2 contenant $TM^{\perp} = RadTM$ comme sous-fibré vectoriel.

Théorème 2.3 ([BEJANCU et DUGGAL, 1996]).

Soit $(M;\, g;\, S(TM))$ une hypersurface de type lumière normalisée d'une variété semi-Riemannienne $(\bar{M};\, \bar{g})$. Alors il existe un fibré vectoriel unique $tr(TM)$ de rang 1 le long de M, tel que pour toute section non zéro $\xi \in \Gamma(RadTM)$ sur le voisinage de coordonnées $\mathcal{U} \subset M$, il existe une section unique $N \in \Gamma(tr(TM))$ sur $\mathcal{U}$ vérifiant : $\forall X \in \Gamma\,(S(TM)_{|\mathcal{U}})$,

$$\bar{g}(N,\xi) = 1 \; et \; \bar{g}(N,N) = \bar{g}(N,X) = 0 \qquad (2.3)$$

Preuve : Considérons un fibré vectoriel supplémentaire F de $TM^{\perp}$ dans $S(TM)^{\perp}$ et prenons une section $V \in (F_{|\mathcal{U}})$, $V \neq 0$. Alors $\bar{g}(\xi, V) \neq 0$ sur $\mathcal{U}$, au cas contraire le fibré vectoriel $S(TM)^{\perp}$ serait dégénéré. Définissons sur $\mathcal{U}$, le champ de vecteurs N par :

$$N = \frac{1}{\bar{g}(\xi,V)}\left\{V - \frac{\bar{g}(V,V)}{2\bar{g}(\xi;V)}\xi\right\}. \; (2.4)$$

Par un calcul direct, on peut montrer que les relations (2.3) sont vérifiées si et seulement si Nprend la forme définie par la relation (2.4).

Considérons un autre voisinage de coordonnées $\mathcal{U}^* \subset M$ qui est tel que $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^* \neq 0$. Les fibrés vectoriels $TM^{\perp}$ et F étant de rang 1, on a que $\xi^* = \alpha\xi$ et $V^* = \beta V$, où α et β sont deux fonctions différentiables définies sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^*$. En remplaçant ξ^*et V^* dans (2.4), on trouve que N^* et N sont reliés sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^*$ par la relation $N^* = \frac{1}{\alpha}N$. Ceci montre que F induit sur M un fibré vectoriel noté par $tr(TM)$ tel que localement, les relations (2.3) soient satisfaites.

Finalement, en considérant un autre fibré vectoriel E supplémentaire à $TM^{\perp}$ dans $S(TM)^{\perp}$, en utilisant la relation (2.4) pour tous les fibrés F et E, on obtient le même fibré $tr(TM)$. ∎

La relation (2.4) montre que le fibré vectoriel $tr(TM)$ est isotrope et on a $tr(T_uM) \cap T_uM = \{0\}$, pour tout $u \in M$. Ainsi en considérant (2.2), on obtient les décompositions suivantes:

$$T\bar{M}_{|M} = S(TM) \oplus_{orth} (TM^{\perp} \oplus tr(TM)) \qquad (2.5)$$

et

$$T\bar{M}_{|M} = TM \oplus tr(TM) \qquad (2.6)$$

Il résulte de la construction (2.6) que pour un choix quelconque de la distribution écran

$S(TM)$, il existe un fibré vectoriel isotrope unique $tr(TM)$, supplémentaire à TM dans $T\bar{M}_{|M}$ qui satisfait les relations (2.3). Le fibré $tr(TM)$ est appelé fibré vectoriel transverse nul de M relative à $S(TM)$.

Il est à remarquer que $\{T_uM^{\perp} \oplus \; tr(T_uM)\} = Vect\{\xi_u, N_u\}$ est un plan hyperbolique, pour tout $u \in M$, cela car la restriction de la métrique g sur ce plan admet comme signature $\{-,+\}$. Il en résulte qu'en utilisant la décomposition (2.5), la distribution écran $S(TM)$ est non dégénérée et admet comme indice *q-1*. En particulier, la distribution écran d'une hypersurface de type lumière d'une variété de Lorentz est riemannienne, c'est à dire la restriction de la métrique sur $S(TM)$ est définie positive.

En utilisant la terminologie employée dans SCHOUTEN [1928], le fibré vectoriel $tr(TM)$ est considéré comme la normale à l'hypersurface dégénérée M dans la variété semi-riemannienne $\bar{M}$. Il est possible dans les calculs de construire premièrement ce fibré transverse nul et ensuite obtenir sa distribution écran correspondante $S(TM)$. Ceci est la démarche à adopter ici pour la construction de la distribution écran canonique.

Considérons $(M, g, S(TM))$ une hypersurface de type lumière de la variété semi-Riemannienne $(\bar{M};\, \bar{g})$ et $\bar{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita sur $\bar{M}$. En utilisant la décomposition (2.6) on a les formules de Gauss et Weingarten suivantes :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \;\; et$$
$$\bar{\nabla}_X V = -A_N X + \nabla_X^t V \qquad (2.7)$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $V \in \Gamma(tr(TM))$, où $\nabla_X Y$ et $A_V X$ appartiennent à $\Gamma(TM)$, $h(X;\, Y)$ et $\nabla_X^t V$ appartiennent à $\Gamma(tr(TM))$. Il est évident de voir que ∇ est une connexion sans torsion, h est une $\mathcal{F}(M)$-forme bilinéaire symétrique sur $\Gamma(TM)$, évaluée dans $tr(TM)$, A_V est un $\mathcal{F}(M)$-opérateur linéaire sur $\Gamma(TM)$ et ∇^t est une connexion linéaire sur $tr(TM)$. h et A_V sont respectivement appelés la seconde forme fondamentale et l'opérateur forme de l'hypersurface M.

Considérant localement $\{\xi, N\}$ une paire des sections de normalisation définies sur $\mathcal{U} \subset M$ dans le théorème 2.3. On définit alors sur $\mathcal{U} \subset M$, une forme bilinéaire symétrique B et une 1-forme τ par $B(X,Y) = g(h(X,Y),\xi)$ et $\tau(X) = \bar{g}(\nabla_X^t N, \xi)$,

pour tous $X,\, Y \in \Gamma(TM)$. Ainsi de (2.7) on obtient les formules locales de Gauss et Weingarten suivantes :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N \;\; \text{et}$$
$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N \qquad (2.8)$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Notons par P le morphisme projection de TM sur $S(TM)$ relativement à la décomposition orthogonale (2.1). On obtient les équations de Gauss et Weingarten pour la distribution écran $S(TM)$ suivantes: $\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + h^*(X, PY)$ et

$$\nabla_X U = -A_U^* X + \nabla_X^{*t} U \qquad (2.9)$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, $U \in \Gamma(TM^{\perp})$. On note que $\nabla_X^* PY$ et $A_U^* X$ appartiennent à $\Gamma(S(TM))$

pendant que $h^*(X, PY)$ et $\nabla_X^{*t} U$ appartiennent à $\Gamma(TM^{\perp})$. Il suit que ∇^* et ∇^{*t} sont des connexions linéaires définies respectivement sur $S(TM)$ et $TM^{\perp}$. h^* est une $\mathcal{F}(M)$-forme bilinéaire sur $\Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM))$ et A_U^* est une $\mathcal{F}(M)$-

opérateur linéaire sur $\Gamma(TM)$. h^*et A_U^* sont respectivement appelés la seconde forme fondamentale et l'opérateur forme de la distribution écran $S(TM)$.

Définissons localement sur $\mathcal{U}$:

$C(X,PY) = \bar{g}(\nabla_X PY, N)$ et $\epsilon(X) = \bar{g}(\nabla_X^{*t}\xi, N)$

pour tous $X,\ Y \in \Gamma(TM)$. On remarque que

$h^*(X,PY) = C(X,PY)\xi$ et $\epsilon(X) = -\tau(X)$.

Ainsi les équations de Gauss et Weingarten locales pour la distribution écran $S(TM)$ sont définies par :

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + C(X,PY)\xi \text{ et}$$
$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X - \tau(X)\xi \qquad (2.10)$$

Par un calcul direct, en utilisant (2.8) et (2.10) et puisque $\bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,\xi) = 0$, On obtient :

$$B(X,PY) = g(A_\xi^* X, PY) et B(X,\xi) = 0 \qquad (2.11)$$

$$C(X,PY) = g(A_N X;\ PY) \text{ et}$$
$$\bar{g}(A_N X, N) = 0 \qquad (2.12)$$

pour tous $X,\ Y \in \Gamma(TM)$. Il est important de mentionner que la seconde forme fondamentale locale B est indépendant du choix de la distribution d'après BEJANCU et DUGGAL [1996].

CONSTRUCTION DE L'ÉCRAN CANONIQU

Soit $\mathbb{R}_q^{m+2}$ un espace semi-euclidien muni de la métrique $\bar{g}$ définie par :

$$\bar{g}(x,y) = -\sum_{i=0}^{q-1} x^i y^i + \sum_{a=q}^{m+1} x^a y^a \qquad (3.1)$$

Considérons une hypersurface M de $\mathbb{R}_q^{m+2}$ définie localement par les équations : $x^A = f^A(u^0,\ldots,u^m)$;

$$rang\left[\frac{\partial f^A}{\partial u^\alpha}\right] = m+1 \qquad (3.2)$$

Avec $A \in \{0,\ldots,m+1\}$, $\alpha \in \{0,\ldots,m\}$ et les f^A sont des fonctions différentiables (lisses) sur un voisinage des coordonnées $\mathcal{U} \subset M$. Ainsi notons par :

$$D^A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^0}{\partial u^0} & \cdots & \frac{\partial f^{A-1}}{\partial u^0}\frac{\partial f^{A+1}}{\partial u^0} & \cdots & \frac{\partial f^{m+1}}{\partial u^0} \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^0}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial f^{A-1}}{\partial u^m}\frac{\partial f^{A+1}}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial f^{m+1}}{\partial u^m} \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

Notons que dans cette section, sauf mention contraire, les notations d'indices suivantes seront utilisées :

$A,B,C \ldots \in \{0,\ldots,m+1\}$; $\alpha,\beta,\gamma \ldots \in \{0,\ldots,m\}$; $a,b,c \ldots \in \{q,\ldots,m+1\}$; $i,j,k \ldots \in \{0,\ldots,q-1\}$.

Le champ de bases naturelles sur le voisinage des coordonnées$\mathcal{U} \subset M$, engendrant le fibré tangent TM est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial f^A}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial x^A}, \alpha \in \{0,\ldots,m\} \qquad (3.4)$$

Par un calcul direct, on peut montrer que le fibré normal $TM^\perp = RadTM$ le long du voisinage des coordonnées $\mathcal{U} \subset M$ est engendré par le champ de vecteurs :

$$\xi = \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i D^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{a=q}^{m+1}(-1)^{a-1} D^a \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (3.5)$$

Par conséquent, M est une hypersurface de type lumière si et seulement si $\bar{g}(\xi,\xi) = 0$, ce qui est équivalent à la condition :

$$\sum_{i=0}^{q-1}\left(D^i\right)^2 = \sum_{a=q}^{m+1}(D^a)^2 \qquad (3.6)$$

Comme vue dans la section précédente, la distribution écran joue un rôle important dans l'étude de la géométrie différentielle des hypersurfaces de type lumière. On montre dans la suite la construction de cette distribution écran en utilisant les fonctions définies dans des équations locales d'une hypersurface de type lumière immergée dans un espace semi-euclidien.

Observons premièrement qu'une section locale de $T\mathbb{R}_q^{m+2}$ définie sur $\mathcal{U} \subset M$ par :

$$V = \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i D^{i-1}\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.7)$$

est nulle part tangente à l'hypersurface M. En effet,

$$\bar{g}(V,\xi) = \sum_{i=0}^{q-1}\left(D^i\right)^2 \qquad (3.8)$$

Et s'il existe un point $u \in \mathcal{U}$ tel que $\bar{g}(V_u,\xi_u) = 0$, alors en utilisant les relations (3.6) et (3.8), on voit clairement que tous les déterminants définis en (3.3) sont identiquement nuls. Ceci est une contradiction du fait que $rang\left[\frac{\partial f^A}{\partial u^\alpha}\right] = m+1$ en tout point $u \in \mathcal{U}$. Ensuite, la section donnée par la relation (3.7) sur chaque voisinage de coordonnées $\mathcal{U}$ engendre un fibré vectoriel L au-dessus de Mde $rang = 1$.

Considérons le fibré vectoriel défini par $H = TM^\perp \oplus L$ au dessus de M, qui est non-dégénéré relativement à la métrique euclidienne $\bar{g}$. En effet, supposons qu'il existe un point $u \in \mathcal{U}$ et un seul vecteur non-zéro $X_u \in H_u$, tel que $\bar{g}_u(X_u,\xi_u) = 0$ et $\bar{g}_u(X_u,V_u) = 0$

Alors de la première égalité, on déduit que $X_u \in T_uM$. Mais $T_uM \cap H_u = T_uM^\perp$, et par conséquent le vecteur X_u est colinéaire au vecteur ξ_u. Ainsi $\bar{g}_u(X_u,V_u) \neq 0$, ceci contredit la seconde égalité.

Finalement, prenons le fibré vectoriel $S(TM)$, complémentaire et orthogonal à H dans $T\mathbb{R}_q^{m+2}$ au-dessus de M. Comme $S(TM)$ est orthogonal à $TM^\perp$, $S(TM) \cap TM^\perp = \{0\}$, et il est de $rang = m$. Il suit que $S(TM)$ définit une distribution sur M et $TM = S(TM) \oplus_{orth} TM^\perp$.

Par conséquent S(TM) est une distribution sur M appelée distribution écran canonique sur$M$.

Ensuite, en utilisant les relations (2.4), (3.7) et (3.8), on obtient :

$$N = \left(\sum_{i=0}^{q-1}(D^i)^2\right)^{-1}\left(V + \frac{1}{2}\xi\right) \qquad (3.9)$$

Le fibré vectoriel engendré localement par N ci-dessus est appelé fibré vectoriel transverse canonique nul. Il est clair que le choix de la paire des sections $\{\xi, N\}$ définies en (3.5) et (3.9) ou équivalemment le triplet $(M, g, S(TM))$ où $S(TM)$ est la distribution écran canonique ci-dessus, définit ce qu'on appelle la normalisation canonique de l'hypersurface M.

Exemple 3.1 (Cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1})

Soit un espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$, c'est à dire l'espace $\mathbb{R}^{m+2}$ muni de la métrique semi-euclidienne définie par :

$$\bar{g}(x,y) = -\sum_{i=0}^{q-1} x^i y^i + \sum_{a=q}^{m+1} x^a y^a \qquad (3.10)$$

Alors, le cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} de $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est donné par l'équation

$$\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2 - \sum_{a=q}^{m+1}(x^a)^2 = 0; \ \ pour \ \ x \neq 0 \qquad (3.11)$$

En considérant l'immersion locale définie par :

$$x^0 = u^0, \ldots, x^m = u^m \,,$$

$$x^{m+1} = \pm\left[\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2 - \sum_{a=q}^{m}(x^a)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.12)$$

par un calcul direct, on montre que Λ_{q-1}^{m+1} est une hypersurface de type lumière (ou dégénérée) de l'espace $\mathbb{R}_q^{m+2}$ et la distribution radicale $RadT\Lambda_{q-1}^{m+1}$ est engendrée par un champ de vecteur global sur Λ_{q-1}^{m+1} donné par :

$$\xi = \sum_{A=0}^{m+1} x^A \frac{\partial}{\partial x^A} \qquad (3.13)$$

L'unique section vérifiant les relations (2.3) et engendrant le fibré vectoriel transverse canonique nul $tr(T\,\Lambda_{q-1}^{m+1})$ est définie globalement sur Λ_{q-1}^{m+1} par :

$$N = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1}\left(-\sum_{i=0}^{q-1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{a=q}^{m+1} x^a \frac{\partial}{\partial x^a}\right) \qquad (3.14)$$

Ainsi la distribution écran canonique correspondante $S(T\,\Lambda_{q-1}^{m+1})$ est engendrée par des champs de vecteurs de type

$$X = \sum_{A=0}^{m+1} X^A \frac{\partial}{\partial x^A}$$

vérifiant les relations :

$$\sum_{i=0}^{q-1} x^i X^i = 0 \,; \sum_{a=q}^{m+1} x^a X^a = 0 \qquad (3.15)$$

en tout point de Λ_{q-1}^{m+1}. En considérant un voisinage des coordonnées $\mathcal{U} \subset \Lambda_{q-1}^{m+1}$ tel que $x^{m+1} > 0$ et $x^{q-1} \neq 0$, alors par un calcul direct en utilisant la relation (3.14), la distribution écran canonique est engendrée localement par la famille des champs de vecteurs $\{X_0, \ldots, X_{q-2}, Y_q, \ldots, Y_m\}$ définis par :

$$X_j = x^{q-1}\frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^{q-1}} \ \ \text{et}$$
$$Y_b = x^{m+1}\frac{\partial}{\partial x^b} - x^b \frac{\partial}{\partial x^{m+1}} \qquad (3.16)$$

pour tout $j \in \{0, \ldots, q-1\}$ et $b \in \{q, \ldots, m\}$. ■

GEOMETRIE DE L'HYPERSURFACE A

Ecran canonique

Dans cette section seront étudiés quelques résultats importants de la géométrie extrinsèque des hypersurfaces de type lumière dotées d'une distribution écran canonique. On considère en général une hypersurface $(M, g, S(TM))$ d'une variété semi-Riemannienne $(\bar{M};\ \bar{g})$.

Une hypersurface de type lumière $(M, g, S(TM))$ d'une variété semi-Riemannienne $(\bar{M};\ \bar{g})$ est dite **totalement ombilique** si localement sur un voisinage de coordonnées $\subset M$, il existe une fonction différentiable ρ telle que $\forall X, Y \in \Gamma(TM_{|\mathcal{U}})$,

$$B(X, Y) = \rho g(X, Y) \qquad (4.1)$$

La distribution écran $S(TM)$ est dite totalement ombilique si sur tout voisinage de coordonnées $\mathcal{U} \subset M$, il existe une fonction différentiable λ telle que $\forall X, Y \in \Gamma(TM_{|\mathcal{U}})$,

$$C(X, PY) = \lambda g(X, Y) \qquad (4.2)$$

Dans le cas où $\lambda = 0$ $(\lambda \neq 0)$ sur $\mathcal{U}$, on dit que la distribution écran $S(TM)$ est totalement géodésique (ou proprement totalement ombilique).

La distribution écran $S(TM)$ est dite intégrable si sur toutes sections $X, Y \in \Gamma(S(TM))$, alors $[X, Y] \in \Gamma(S(TM))$.

$(M, g, S(TM))$ est dite hypersurface à écran localement conforme dans ATINDOGBE et DUGGAL [2004] si les opérateurs forme A_N et A_ξ^* de M et de la distribution écran $S(TM)$ sont reliés par la relation

$$A_N = \varphi A_\xi^* \qquad (4.3)$$

où φ est une fonction différentiable non-nulle sur le voisinage de coordonnées $\mathcal{U} \subset M$. En

particulier l'hypersurface est dite à écran globalement conforme si $\mathcal{U} = M$.

Soient $\bar{\nabla}$ et ∇ , la connexion de Levi-Civita de $\bar{M}$ et la connexion induite sur M. On note par $\bar{R}$ et R les tenseurs de courbure de Riemann de $\bar{\nabla}$ et ∇, respectivement. L'équation de Gauss de l'hypersurface de type lumière, dépendant certainement du choix de l'écran $S(TM)$ est définie par BEJANCU et DUGGAL [1996] : Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM_{|\mathcal{U}})$

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + B(X, Z)A_N Y \\ &\quad - B(Y, Z)A_N X + (\nabla_X B)(Y, Z)N \\ &\quad + B(Y, Z)\tau(X)N - (\nabla_Y B)(X, Z)N \\ &\quad - B(X, Z)\tau(Y)N \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Notons par $R^{(0,2)}$ le tenseur induit de type $(0, 2)$ sur M, donné par : $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM_{|\mathcal{U}})$,

$$R^{(0,2)} = trace\,\{ Z \to R(Z, X)Y \} \qquad (4.5)$$

Puisque la connexion induite ∇ sur M n'est pas métrique, en général le tenseur $R^{(0,2)}$ n'est pas symétrique. En considérant dans un voisinage de coordonnées $\subset M$, un champ des bases locales $\{\xi, W_a\}$ sur M et son correspondant $\{\xi, W_a, N\}$ sur $\bar{M}$ relativement aux décompositions (2.1) et (2.5), ce tenseur est défini par : $\forall X, Y \in \Gamma(TM_{|\mathcal{U}})$,

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \bar{g}(R(\xi,X)Y,N) + \textstyle\sum_{a,b=1}^{m} \epsilon_{ab} g(R(W_a,X)Y,W_b) \quad (4.6)$$

où $\epsilon_{ab} = g(W_a, W_b)$. Par un calcul direct, en utilisant la relation (4.4) dans (4.6) suivant la technique développée dans ATINDOGBE et *al.* [2013], on obtient la relation : $\forall X, Y \in \Gamma(TM_{|\mathcal{U}})$,

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \bar{R}ic(X,Y) + B(X,Y)trA_N - g(A_N X, A_\xi^* Y) - \bar{g}(R(\xi,Y)X,N) \quad (4.7)$$

où $\bar{R}ic$ est le tenseur de Ricci de $\bar{M}$. Notons que $R^{(0,2)}$ devient le tenseur de Ricci induit sur Ms'il est symétrique. Dans ce cas, on le note Ric.

Théorème 4.1 La distribution écran canonique $S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$ du cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} d'un espace semi-euclidienne $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est intégrable.

Preuve : Considérons l'écran canonique $S(TM)$ de M défini dans la section 3. Soient $X, Y\ \in\ \Gamma(S(TM))$. En tenant compte que $\bar{\nabla}$ est une connexion plate de Levi-Civita (métrique et

sans torsion) sur l'espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$, en utilisant les relations (2.8), (3.13) et (3.14), puisque la seconde forme fondamentale B est symétrique et le tenseur de torsion

$$\tau(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y],$$

on a :

$$\begin{aligned}
&\bar{g}([X,Y],N) = \\
&\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, \quad \xi - 2\sum_{i=0}^{q-1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} \sum_{i=0}^{q-1} x^i \left\{\bar{g}\left(\bar{\nabla}_Y X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X Y, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right\} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} \sum_{i=0}^{q-1} x^i \left\{\bar{g}\left(X, \bar{\nabla}_Y \frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \bar{g}\left(Y, \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent $[X, Y\,] \in S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$ et ainsi la distribution écran $S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$ est intégrable. ∎

Le résultat donné dans le théorème 4.1 définit l'intégrabilité de la distribution écran canonique du cône de lumière d'un espace semi-euclidien, quel que soit l'indice q. En utilisant les relations (2.8), (2.10) et (2.12), on a pour tous $X, Y \in S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$:

$$\begin{aligned}
C(X,Y\,) - C(Y,X) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, N) \\
&= \bar{g}([X,Y],N) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Il en résulte que la seconde forme fondamentale h^* (ou C) de $S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$ est symétrique sur $S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$ et l'opérateur forme A_N du cône est symétrique relativement la métrique induite g

sur Λ_{q-1}^{m+1}.

En utilisant le résultat de BEJANCU et DUGGAL [1996], il suit que les courbes intégrales de ξ sur le Cône Λ_{q-1}^{m+1} sont des géodésiques nulles de l'espace $\mathbb{R}_q^{m+2}$ et par conséquent ce sont des portions de droites. Les deux distributions $S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$ et $RadT\Lambda_{q-1}^{m+1}$ sont toutes intégrables sur le cône Λ_{q-1}^{m+1}. Ainsi on a le résultat suivant :

Corollaire 4.2 Le cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} d'un espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est localement le produit $d \times M$, où d est une ligne droite et M est une sous-variété semi-Riemannienne de $\mathbb{R}_q^{m+2}$ d'indice $q-1$.

Le résultat suivant généralise le résultat de ATINDOGBE et DUGGAL [2004], en considérant l'indice quelconque q.

Théorème 4.3 Le cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} d'un espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est une hypersurface à écran globalement conforme.

Preuve : Considérons l'écran canonique $S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$ du cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} défini dans l'exemple 3.1. Soient $X, Y \in \Gamma(T\Lambda_{q-1}^{m+1})$. En tenant compte de la connexion plate de Levi-Civita sur l'espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$, en utilisant les relations (2.8), (3.13) et (3.14) On a ce qui suit :

$$\begin{aligned}
C(X,Y) &= \bar{g}(\nabla_X PY, N) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X PY, N) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X PY, \xi - 2\sum_{i=0}^{q-1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} \left\{B(X,PY) - 2\sum_{i=0}^{q-1} x^i \bar{g}\left(\bar{\nabla}_X PY, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} \left\{B(X,PY) + 2\sum_{i=0}^{q-1} x^i \bar{g}\left(PY, \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} B(X,PY)
\end{aligned}$$

Il en résulte, en utilisant les relations (2.11) et (2.12), que : $\forall X \in \Gamma(T\Lambda_{q-1}^{m+1})$,

$$A_N X = \frac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} A_\xi^* X \quad (4.8)$$

Ainsi l'hypersurface est à écran globalement conforme, où la fonction différentiable non-nulle sur M est définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} \quad ∎ \quad (4.9)$$

Théorème 4.4 Soit Λ_{q-1}^{m+1} le cône de lumière de l'espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$ doté de l'écran canonique $S(T\ \Lambda_{q-1}^{m+1})$. Alors on a : Le cône Λ_{q-1}^{m+1} est totalement ombilique.

Son écran canonique $S(T\,\Lambda_{q-1}^{m+1})$ est proprement totalement ombilique.

Preuve : (1) Utilisant les relations (2.8) et (2.11) et du fait que la connexion $\bar{\nabla}$ sur $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est plate, on a : $\forall X \in \Gamma(\Lambda_{q-1}^{m+1})$,

$$\nabla_X \xi = \bar{\nabla}_X \xi = X \qquad (4.10)$$

Il en résulte, en utilisant (2.10) que

$$A_\xi^* X + \tau(X)\xi + X = 0 \qquad (4.11)$$

En remplaçant X par PX dans (4.11) et en tenant compte que A_ξ^* est évalué dans $\left(S(T\,\Lambda_{q-1}^{m+1})\right)$, on obtient $A_\xi^* PX = -PX$. Il en résulte que le cône Λ_{q-1}^{m+1} est totalement ombilique avec $\rho = -1$, c'est-à-dire : $\forall X, Y \in \Gamma(T\Lambda_{q-1}^{m+1})$,

$$B(X, Y) = -g(X, Y) \qquad (4.12)$$

(2) En utilisant les relations (4.8) et (4.12), on a :

$$C(X, PY) = \bar{g}(A_N X, PY)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} g(A_\xi^* X, PY)$$

Ainsi, on obtient : $\forall X, Y \in \Gamma(T\Lambda_{q-1}^{m+1})$,

$$C(X, PY) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1} g(X, PY) \ \blacksquare \qquad (4.13)$$

Utilisant les relations (4.4), (4.8), (4.13) et puisque la courbure de Riemann $\bar{R}$ de $\bar{\nabla}$ est nulle, la courbure induite sur le cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} de l'espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est définie par : $\forall X, Y \in \Gamma(T\Lambda_{q-1}^{m+1})$,

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1}\{g(Y, Z)PX - g(X, Z)PY\} \qquad (4.14)$$

Puisque le tenseur de Ricci $\bar{R}ic$ de $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est nul, en utilisant les relations (4.7), (4.8), (4.12), (4.14) et par un calcul direct, on obtient le tenseur de Ricci induit sur le cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1}, donné par la relation :$\forall X, Y \in \Gamma(T\Lambda_{q-1}^{m+1})$,

$$Ric(X, Y) = -\left\{trA_N + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1}\right\} g(X, Y) \qquad (4.15)$$

Ainsi le cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} de l'espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est localement une hypersurface d'Einstein.

OBJETS GEOMETRIQUES INDUITS DU CONE LOCALEMENT

En considérant un voisinage des coordonnées $\mathcal{U} \subset \Lambda_{q-1}^{m+1}$ tel que $x^{m+1} > 0$ et $x^{q-1} \neq 0$, alors le fibré tangent $T\,\Lambda_{q-1}^{m+1}$ est engendrée localement par la famille des champs de vecteurs $\{\xi, X_0, \dots, X_{q-2}, Y_q, \dots, Y_m\}$ où les champs sont définis suivant les relations (3.13) et (3.16).

Dans tout le calcul qui suit, on prend

$$\theta = \left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1}$$

Fait 1 : Calcul des $B(X, Y)$ et $C(X, Y)$

En utilisant les relations (4.12) et (4.13), localement les composantes non nulles de secondes formes fondamentales B et C sont données par : $\forall j, k = 0, \dots, q-2$; $\forall a, b = q, \dots, m$,

$$B(X_j, X_j) = (x^j)^2 + (x^{q-1})^2 \ ;$$
$$C(X_j, X_j) = \frac{1}{2}\theta\left[(x^j)^2 + (x^{q-1})^2\right] \ ;$$
$$B(X_j, X_k) = x^j x^k \ , \ j \neq k \ ;$$
$$C(X_j, X_k) = \frac{1}{2}\theta x^j x^k \ , \ j \neq k \ ;$$
$$B(Y_a, Y_a) = -[(x^a)^2 + (x^{m+1})^2] \ ;$$
$$C(Y_a, Y_a) = -\frac{1}{2}\theta[(x^a)^2 + (x^{m+1})^2] \ ;$$
$$B(Y_a, Y_b) = -x^a x^b \ , \ a \neq b \ ;$$
$$C(Y_a, Y_b) = -\frac{1}{2}\theta x^a x^b \ , \ a \neq b$$

Fait 2 : Calcul des $A_N X$ et $A_\xi^* X$

En utilisant les relations (4.8) et (4.12), localement les composantes non nulles des opérateurs formes A_N et A_ξ^* sont données par : $\forall j = 0, \dots, q-2$; $\forall a = q, \dots, m$,

$$A_\xi^* X_j = -X_j \quad et \quad A_N X_j = -\frac{1}{2}\theta X_j$$
$$A_\xi^* Y_a = -Y_a \quad et \quad A_N Y_a = -\frac{1}{2}\theta Y_a$$

Fait 3 : Calcul des $\bar{\nabla}_X Y$ et $\bar{\nabla}_X Y$

En utilisant les relations (3.13), (3.14) et (3.16), localement les composantes non nulles de la Connexion $\bar{\nabla}$ sont données par :$\forall j, k = 0, \dots, q-2$; $\forall a, b = q, \dots, m$,

$$\bar{\nabla}_\xi \xi = \xi \ ; \ \bar{\nabla}_\xi X_j = \bar{\nabla}_{X_j} \xi = X_j \ ;$$
$$\bar{\nabla}_\xi Y_a = \bar{\nabla}_{Y_a} \xi = Y_a \ ;$$
$$\bar{\nabla}_{X_j} X_j = -x^j \frac{\partial}{\partial x^j} - x^{q-1} \frac{\partial}{\partial x^{q-1}} \ ;$$
$$\bar{\nabla}_{Y_a} Y_a = -x^a \frac{\partial}{\partial x^a} - x^{m+1} \frac{\partial}{\partial x^{m+1}} \ ;$$
$$\bar{\nabla}_{X_j} X_k = -x^j \frac{\partial}{\partial x^k} (j \neq k) \ ;$$
$$\bar{\nabla}_{Y_a} Y_b = -x^a \frac{\partial}{\partial x^b} (a \neq b) \ ;$$
$$\bar{\nabla}_\xi N = -N \ ; \ \bar{\nabla}_{X_j} N = \frac{1}{2}\theta X_j \ ; \ \bar{\nabla}_{Y_a} N = \frac{1}{2}\theta Y_a$$

Fait 4 : Calcul des $\nabla_X Y$

En utilisant les relations (2.8), (3.13) et (3.16), localement les composantes non nulles de la connexion induite ∇ sur Λ_{q-1}^{m+1} sont données par :$\forall j, k = 0, \dots, q-2$; $\forall a, b = q, \dots, m$,

$$\nabla_\xi \xi = \xi \ ; \quad \nabla_\xi X_j = \nabla_{X_j} \xi = X_j \ ;$$
$$\nabla_\xi Y_a = \nabla_{Y_a} \xi = Y_a \ ;$$
$$\nabla_{X_j} X_j = -\frac{1}{2}\theta\left[(x^{q-1})^2 + (x^j)^2\right]\xi + x^{q-1} \sum_{i=0(\neq j)}^{q-2} x^i X_i$$
$$\nabla_{X_j} X_k = -\frac{1}{2}\theta x^j x^k \xi - x^j x^{q-1} X_k \ , \ j \neq k$$
$$\nabla_{Y_a} Y_a = -\frac{1}{2}\theta[(x^{m+1})^2 + (x^a)^2]\xi + x^{m+1} \sum_{b=0(\neq a)}^{m} x^b Y_b$$
$$\nabla_{Y_a} Y_b = -\frac{1}{2}\theta x^a x^b \xi - x^a x^{m+1} Y_b \ , \quad a \neq b$$

Fait 5 : Calcul des $\tau(X)$

$$Quel\ que\ soit\ X \in \Gamma\left(T\Lambda_{q-1}^{m+1}\right),\ on\ a$$

$$\tau(X) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X N, \xi) = -\bar{g}(N, \bar{\nabla}_X \xi) = -\bar{g}(N, X)$$

Ainsi localement la seule composante non nulle de la 1-forme τ est $\tau(\xi) = -1$.

Fait 6 : Calcul de la courbure $R(X, Y)Z$

En utilisant la relation (4.14), localement les seules composantes non nulles de la courbure de Riemann sont :$\forall j,\ k,\ l = 0, \dots, q-2\ ; \forall a, b,\ c = q, \dots, m,$

$$(1) R(X_j, X_k)X_l = \frac{1}{2}\theta\left(x^j x^l X_k - x^k x^l X_j\right),$$

pour j, k, l *différents ;*

$$(2) R(X_j, X_k)X_j = -R(X_k, X_j)X_j = \frac{1}{2}\theta\left\{\left(\left(x^j\right)^2 + (x^{q-1})^2\right)X_k - \left(x^j x^k\right)X_j\right\}$$

pour $j \neq k$

$$(3) R(Y_a, Y_b)X_c = \frac{1}{2}\theta\left(x^b x^c Y_a - x^a x^c Y_b\right),$$

pour a, b, c différents ;

$$(4) R(Y_a, Y_b)Y_a = -R(Y_b, Y_a)Y_a = \frac{1}{2}\theta\{(x^a x^b)Y_a - ((x^a)^2 + (x^{m+1})^2)Y_b\}$$

$, a \neq b$

$$(5) R(Y_a, X_j)X_k = -\frac{1}{2}\theta x^j x^k Y_a = -R(X_j, Y_a)X_k$$

pour $j \neq k$ *;*

$$(6) R(X_j, Y_a)Y_b = \frac{1}{2}\theta x^a x^b X_j = -R(Y_a, X_j)Y_b$$

pour $a \neq b$ *;*

CONCLUSION

La technique développée par BENJACU et DUGGAL [1966] permet de contourner le défaut de la normale $TM^{\perp}$ qui se retrouve contenue dans TM pour les hypersurfaces nulles. Malheureusement cette technique crée une autre difficulté, la multiplicité du fibré vectoriel écran $S(TM)$. Il est donc impérieux de réfléchir en terme d'une distribution écran de référence (écran canonique) et d'étudier les objets géométriques induits relatifs à cette distribution.

Dans cet article nous avons considéré la construction de l'écran canonique des hypersurfaces nulles d'un espace semi-euclidien, en particulier celui du cône de lumière Λ_{q-1}^{m+1} de $\mathbb{R}_q^{m+2}$. Les objets géométriques induits sur ce cône ont été construits localement et globalement. Les propriétés géométriques de ce cône ont été étudiées en généralisant certains résultats connus utilisant les objets géométriques induits. Il est à remarquer, après cette étude, que l'écran canonique du cône admet des propriétés géométriques assez préférées (l'intégrabilité, la conformité, l'ombilicité) qui ont permis une bonne description géométrique de ce cône de lumière.

Dans le futur, on s'intéressera sur d'autres construction des fibrés vectoriels écrans de référence, entre autre l'écran naturelle sur une hypersurface de Monge. Aussi construire analytiquement l'écran canonique pour le cas général des hypersurfaces nulles vérifiant les conditions d'admissibilité de l'écran canonique.

RESUME

Dans cette étude, nous avons présenté la construction de l'écran canonique pour une classe des hypersurfaces de type lumière des espaces semi-euclidiens, en particulier celui du cône de lumière, suivant l'approche de BEJANCU et DUGGAL. Nous avons démontré l'intégrabilité.

(Théorème 4.1) , la conformité (Théorème 4.3) et l'ombilicité (Théorème 4.4) de l'écran canonique du cône de lumière de l'espace semi-euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$ en général. Nous avons enfin déduit les objets géométriques induits et les propriétés géométriques de ce cône de lumière.

Mots clés

Distribution à écran canonique ; Hypersurface à écran conforme ; Ecran intégrable ; Hypersurface totalement ombilique.

REFERENCES

AKIVIS M.A., GOLDBERG V.V. [2000]. On some methods of construction of invariant normalizations of lightlikehypersurfaces, Differential Geom. Appl. 12(2), 121-143.

ATINDOGBE C., DUGGAL K.L. [2004]. Conformal screen on lightlike hypersurfaces, Int. J. of Pure and App. Math., 11, 421-442.

ATINDOGBE C., LUNGIAMBUDILA O., TOSSA J. [2013]. Scalar curvature and Symmetry properties of Lightlikesubmanifolds, Turk J. Math. 37, 95-113.

BEJANCU A. [1993]. A canonical screen distribution on a degenerate hypersurface.,Sci. Bull. Ser. A, Appl. Math. Phys., 55, 55-61.

BEJANCU A., DUGGAL K.L. [1996]. Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Amsterdam.

BEJANCU A., FERRANDEZ A., LUCAS P. [1998]. A new viewpoint on geometry of a lightlikehypersurface in a semi-Euclidean space.,Saitama Math. J. 31-38.

DUGGAL K.L. [2007]. A report on canonical null curves and screen distributions for Lightlike geometry, Acta. Appl. Math. 95, 135-149.

KUPELI D.N. [1987]. Degenerate submanifolds in semi-Riemannian geometry, Geom. Dedicata, 24, 337-361.

SCHOUTEN J.A. [1928]. On non-holonomic connections, Proc. Kon. Akad. Amsterdam, 31, 291-299.